MATEMÁTICA 2 - Verano 2020

Práctica 2 - Espacios vectoriales

Los ejercicios marcados con ($*$) son opcionales (o un poco más difíciles)

1. Mostrar que los siguientes son espacios vectoriales, verificando que son subespacios de espacios vectoriales conocidos. Explicitar la suma y el producto por escalares en cada caso.

   a) $K_n[X] := \{f \in K[X] \ : \ f = 0 \text{ ó } \operatorname{gr}(f) \leq n\}$
   b) $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \ : \ A^t = -A\}$
   c) $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ : \ f''(1) = f(2)\}$
   d) $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \ : \ \int_0^1 f(x)\,dx = 0\}$

2. Mostrar que $\{f \in K[X] \ : \ f = 0 \text{ ó } \operatorname{gr}(f) \geq 2\}$ no es un subespacio de $K[X]$.

3. Probar que $S \cup T$ es un subespacio de $V \iff S \subseteq T$ ó $T \subseteq S$.

4. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes $\mathbb{R}$-espacios vectoriales

   a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y - z = 0\,; \ x - y = 0\}$
   b) $\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \ : \ A = -A^t\}$
   c) $\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \ : \ \operatorname{tr}(A) = 0\}$
   d) $\mathbb{R}_n[X]$
   e) $\{f \in \mathbb{R}_4[X] \ : \ f(1) = 0 \text{ y } f(2) = f(3)\}$
   f) ($*$) $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \ : \ f''' = 0\}$

5. (*) Probar que $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' + f = 0\} = \langle \operatorname{sen} x, \cos x\rangle$.

   (Sugerencia: Probar que si $f'' + f = 0$, entonces $f'(x)\cos x + f(x)\operatorname{sen} x$ es una función constante, cuyo valor es $f(\frac{\pi}{2})$. Deducir que $\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})\operatorname{sen} x}{\cos x}$ es una función constante en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.)

6. Sea $S = \langle(1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

   a) Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$.
   b) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.
   c) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

7. Sea V un K-espacio vectorial y sean v, $w \in V$. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

   a) $\langle v,\, w\rangle = \langle v,\, w + 5v\rangle$.
   b) $\langle v,\, w\rangle = \langle v,\, aw + bv\rangle$, $\forall\, a, b \in K$.
   c) $\langle v,\, w\rangle = \langle v,\, aw + bv\rangle$, $\forall\, a \in K - \{0\}$, $b \in K$.
   d) $\langle v_1,\, v_2,\, w\rangle = \langle v_3,\, v_4,\, w\rangle \Rightarrow \langle v_1,\, v_2\rangle = \langle v_3,\, v_4\rangle$.
   e) $\langle v_1,\, v_2,\, w\rangle = \langle v_1,\, v_2\rangle \ \Leftrightarrow \ w \in \langle v_1, v_2\rangle$.

8. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre K.

   a) $\{(1-i, i),\ (2, -1+i)\}$ en $\mathbb{C}^2$ para $K = \mathbb{R}$ y para $K = \mathbb{C}$.

   b) $\{(1-X)^3,\ (1-X)^2,\ 1-X,\ 1\}$ en $K[X]$

   c) $\{\operatorname{sen} x\ ,\ \cos x\ ,\ x\cos x\}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ para $K = \mathbb{R}$

   d) $\{e^x\ ,\ x\ ,\ e^{-x}\}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ para $K = \mathbb{R}$

   e) $u = (1,0,1,0,1,\ldots)$, $v = (0,1,0,1,0,\ldots)$, $w = (1,1,0,1,1,0,\ldots)$ en $K^{\mathbb{N}}$

9. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales cada uno de los siguientes subconjuntos es linealmente independiente.

   a) $\{(1,2,k),\ (1,1,1),\ (0,1,1-k)\} \subset \mathbb{R}^3$

   b) $\{(k,1,0),\ (3,-1,2),\ (k,2,-2)\} \subset \mathbb{R}^3$

   c) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$

10. Hallar una base y la dimensión de los siguientes $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

    a) $\langle (1,4,-2,1),\ (1,-3,-1,2),\ (3,-8,-2,7) \rangle$

    b) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4\ :\ x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\}$

    c) $\{f \in \mathbb{R}_3[X]\ :\ f(2) = f(-1)\}$

    d) $\{f \in \mathbb{R}_3[X]\ :\ f(2) = f'(2) = 0\}$

    e) $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n}\ :\ \operatorname{tr}(A) = 0\}$

    f) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ :\ a_i = a_j,\ \forall\, i,j\}$

11. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del K-espacio vectorial V indicado.

    a) $\{(1,1,1,1),\ (0,2,1,1)\}\ ,\ V = \mathbb{R}^4, K = \mathbb{R}$

    b) $\{X^3 - 2X + 1,\ X^3 + 3X\}\ , V = \mathbb{R}_3[X], K = \mathbb{R}$

    c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}\ , V = \mathbb{C}^{2\times 2}, K = \mathbb{C}$

12. Extraer una base de los siguientes K-espacios vectoriales, de cada uno de los sistemas de generadores dados.

    a) $\langle (1,1,2),\ (1,3,5),\ (1,1,4),\ (5,1,1) \rangle \subset \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}$

    b) $\langle X^2 + 2X + 1,\ X^2 + 3X + 1,\ X + 2 \rangle \subset \mathbb{R}[X], K = \mathbb{R}$

    c) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^{2\times 2}, K = \mathbb{C}$

13. Hallar la dimensión de los siguientes $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, para cada $k \in \mathbb{R}$

    a) $\langle (1,k,1),\ (-1,k,1),\ (0,1,k) \rangle$

    b) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

   c) $\{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

14. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$\langle(-2,1,6),(3,0,-8)\rangle = \langle(1,k,2k),(-1,-1,k^2-2),(1,1,k)\rangle$$

15. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S \cap T$ y $S+T$ de V. Determinar si la suma es directa.

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) : 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x,y,z) : x + z = 0\}$
   b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) : 3x - 2y + z = 0,\ x - y = 0\}$ y $T = \langle(1,1,0),(5,7,3)\rangle$
   c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle(1,1,3),(1,3,5),(6,12,24)\rangle$ y $T = \langle(1,1,0),(3,2,1)\rangle$
   d) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(1) = 0\}$ y $T = \langle 1, X, X^2, X^3 + 2X^2 - X, X^5\rangle$
   e) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}[X] : f'(0) = f''(0) = 0\}$

16. Sean $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle(1,k,2),(-1,2,k)\rangle \subset \mathbb{R}^3$. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \cap T = \langle(0,1,1)\rangle$.

17. En cada caso siguiente, probar que S y T son subespacios de V que satisfacen $S \oplus T = V$.

   a) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f$ es constante$\}$
   b) $V = K^{n\times n}$, $S = \{A \in K^{n\times n} : A = A^t\}$ y $T = \{A \in K^{n\times n} : A = -A^t\}$
   (los elementos de S se llaman *matrices simétricas* y los de T, *matrices antisimétricas*).

18. Para cada subespacio $S \subseteq V$ dado, hallar un subespacio $T \subseteq V$ tal que $S \oplus T = V$.

   a) $S = \langle(1,2,-1,3),\ (2,3,-2,1),\ (0,1,0,7)\rangle$, $V = \mathbb{R}^4$
   b) $S = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \mathrm{tr}(A) = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$
   c) $S = \langle 3, 1 + X^2\rangle$, $V = \mathbb{R}_4[X]$

19. Mostrar que si S, T son subespacios de $\mathbb{R}^3$ tales que $\dim S = \dim T = 2$, entonces existe $v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$.

20. (*) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea T un hiperplano de V (i.e. un subespacio de dimensión $n-1$).

   a) Probar que $\forall\, v \notin T$, $T \oplus \langle v\rangle = V$.
   b) Si S es un subespacio de V tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S + T = V$. Calcular $\dim(S \cap T)$.
   c) Si S y T son dos hiperplanos distintos, deducir $\dim(S \cap T)$.

21. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base $\mathcal{B}$ en los siguientes casos:

   a) $V = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{B} = \{(1,2,-1),(0,1,1),(0,0,2)\}$, $v = (1,2,-1)$ y $v = (x_1,x_2,x_3)$
   b) $V = \mathbb{R}_3[X]$; $\mathcal{B} = \{3,\ X+1,\ X^2+5,\ X^3+X^2\}$, $v = 2X^2 - X^3$
   c) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$; $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$, $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$